SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

F. Segala

UNA STIMA PER LA SOLUZIONE FONDAMENTALE DELL'OPERATORE DEL CALORE SUL GRUPPO DI HEISENBERG

26 Aprile 1990

1. INTRODUZIONE

Denotiamo con K la soluzione fondamentale per l'operatore del calore $H = \Delta - \frac{\partial}{\partial s}$ in $\mathbb{R}^{N+1}$ con polo nell'origine, ossia

$$K(x,s) = (4\pi s)^{-N/2} e^{-|x|^2/4s} .$$

Posto $E(x,s) = \log K(x,s)$, facilmente si ha

$$\nabla_x E(x,s) = -\frac{x}{2s} , \quad \frac{\partial E}{\partial s}(x,s) = \frac{|x^2|}{4s^2} - \frac{N}{2s}$$

e dunque sussiste la seguente stima:

$\forall \theta > 1$ esiste $\delta = \delta(N,\theta)$ tale che

$$(1.1) \qquad |\nabla_x E|^2 \leq \theta \frac{\partial E}{\partial S} \qquad 0 < s \leq \delta\, |x|^2$$

Precisamente è $\delta = \dfrac{\theta - 1}{2N\theta}$.

La stima (1.1) ha varie applicazioni. Una delle più interessanti, evidenziata da Evans e Gariepy [EG], ha come conseguenza il criterio di

Wiener per H.

Ci chiediamo se una stima del tipo (1.1) sussiste per la soluzione fondamentale dell'operatore del calore sul gruppo di Heisenberg.

Indichiamo con $\mathbb{H}^N$ il gruppo di Heisenberg, la cui legge (di gruppo) è la seguente

$$(x,y,t) \cdot (x',y',t') = (x+x',\ y+y',\ t+t' + 2(x'\cdot y - xy')).$$

L'operatore di Laplace su $\mathbb{H}^n$ è allora definito come segue

$$\Delta_{\mathbb{H}^N} = \sum_1^N (X_j^2 + Y_j^2)$$

con $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j \frac{\partial}{\partial t}$, $Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2x_j \frac{\partial}{\partial t}$.

L'operatore del calore su $\mathbb{H}^N \times \mathbb{R}$ è dunque

$$L = \Delta_{\mathbb{H}^H} - \frac{\partial}{\partial s}.$$

Se $(z,t) \in \mathbb{H}^N$, poniamo

$$d(z,t) = (|z|^4 + t^2)^{1/4}$$

ed allora se $(\zeta,\tau) \in \mathbb{H}^N$, la distanza su $\mathbb{H}^N$ è definita da

$$d(\dot{z},t;\zeta,\tau) = d((\zeta,\tau)^{-1} \circ (z,t)).$$

Finalmente, se u è una funzione su $\mathbb{H}^N$, formalmente poniamo

$$|\mathrm{grad}_{\mathbb{H}^n} u|^2 = \sum_1^N [(X_j u)^2 + (Y_j u)^2]$$

Si dimostra allora

Teorema 1.1. Sia $E((z,t),s) = \log(p(z,t),s)$, dove p è la soluzione fondamentale per L. $\forall\theta > 1$ esiste $\delta = \delta(N,\theta) > 0$ tale che

$$(1.2) \qquad |\mathrm{grad}_{\mathbb{H}^n} E|^2 \leq \theta \frac{\theta E}{\theta S} \qquad 0 < s \leq \delta\, d(z,t)^2.$$

La dimostrazione di (1.2), come vedremo è decisamente delicata e verrà effettuata in più tappe nella sezione 3, attraverso uno sviluppo asintotico di E.

2. UNA APPLICAZIONE DELLA (1.2)

Usando una strategia del tipo di quella usata in [GL1] per operatori parabolici a coefficienti variabili, la stima (1.2) permette di ottenere il criterio di Wiener per l'operatore H. La formulazione del criterio di Wiener per H, con la relativa prova è contenuta in [GS2].

3. PROVA DELLA (1.2)

Per semplificare le notazioni, proviamo la (1.2) nel caso N = 1.

Nel 1977 Gaveau [G] ha dato la seguente rappresentazione per la soluzione fondamentale p di $H = \Delta_{\mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}} - \frac{\partial}{\partial s}$:

$$(3.1) \qquad p((z,t),s) = (4\pi s)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\tau}{\mathrm{sh}2\tau}\right) e^{\left[i\frac{t\tau}{2s} - \frac{|z|^2}{4s}\frac{2\tau}{\mathrm{th}2\tau}\right]} d\tau$$

Sia ora $R \geq 0$ e $t \in \mathbb{R}$. Poniamo

$$(3.2) \qquad h(R,t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[it\tau - R\frac{\tau}{\mathrm{th}\tau}\right]} \frac{2}{\mathrm{sh}\tau}\, d\tau$$

E' chiaro che

$$p((z,t),s) = (4\pi s)^{-2}\, h\left(\frac{|z|^2}{4s}, \frac{t}{4s}\right). \tag{3.3}$$

Scriviamo la stima (1.2) in termini di h, tenuto conto di (3.3).

$\forall\, \theta > 1$, esiste $\delta = \delta(\theta) >$ tale che

$$\begin{aligned} &R\left[\left(\frac{\partial h}{\partial R}(R,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial t}(R,t)\right)\right]^2 \leq \\ &\leq -\theta\, h(R,t)\left[\frac{h(R,t)}{2} + R\,\frac{\partial h}{\partial R}(R,t) + t\,\frac{\partial h}{\partial t}(R,t)\right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

quando $(R,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ e $R^2 + t^2 \geq (4\delta)^{-2}$.

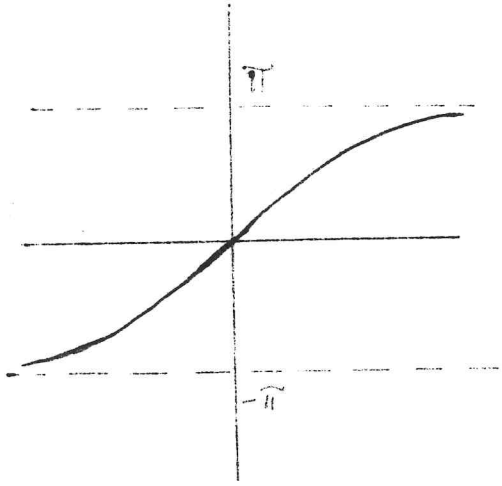
1ª TAPPA. Sia $|t|/R \leq M$ per qualche $M > 0$. Poniamo $\sigma = t/R$ e osserviamo che

$$h(R,\sigma R) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{[-R(\frac{\tau}{th\tau} - i\sigma t)]}\,\frac{2}{Sh\tau}\, d\tau. \tag{3.5}$$

Occupiamoci della fase

$$\Phi(\tau,\sigma) = \frac{\tau}{\text{th}\tau} - i\sigma t.$$

Tale fase ha un punto critico immaginario $\tau(\sigma) = i\beta(\sigma)$ ([G]) con $\beta : \mathbb{R} \to -\pi,\pi[$ dispari, strettamente crescente e analitica.



Possiamo dunque scrivere per $|\text{Im}\tau| < \pi$:

$$\phi(\tau,\sigma) = \phi(\tau(\sigma),\sigma) + (\tau-\tau(\sigma))^2\ E(\tau,\sigma)$$

con $E(\tau(\sigma),\sigma) = 0$. Una applicazione del Teorema di Cauchy consente di

ottenere

$$(3.6) \qquad h(R,\sigma R) = \frac{1}{2}\, e^{-R\,\Phi(\tau(\sigma),\sigma)} \int_{\mathrm{Im}\tau=\beta(\sigma)} e^{[-R(\tau-\tau(\sigma))^2 E(\tau,\sigma)]}\, \frac{\tau}{\mathrm{sh}\tau}\, d\tau$$

Notiamo che se $|\sigma| \le M$, $|t| + R$ pesa come R, in quanto $|t| + R = R(1 + \frac{|t|}{R}) = R(1 + |\sigma|)$. Notiamo anche che la retta $\mathrm{Im}\tau = \beta(\sigma)$ è contenuta nella regione

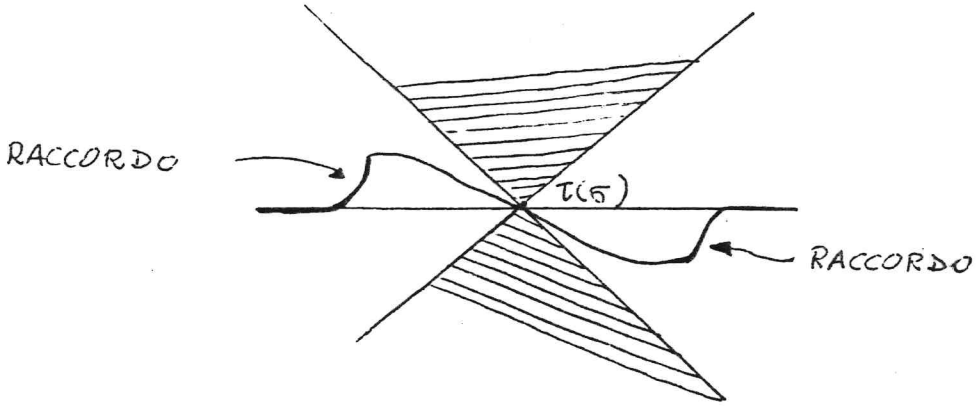
$$\mathrm{Re}\,\Phi(\tau,\sigma) \ge \mathrm{Re}\,\Phi(\tau(\sigma),\sigma).$$

Allora è possibile determinare un cammino

$\tau = T(u,\sigma)$ tale che per $|\sigma| \le M$, $\quad |u| \le \varepsilon = \varepsilon_M$:

$$(3.7) \qquad \begin{cases} T(0,\sigma) = \tau(\sigma) \\ (T(u,\sigma) - \tau(\sigma))^2\, E\,(T(u,\sigma),\sigma) = u^2 \end{cases}$$

La figura illustra tutto questo.



E' possibile fare in modo che i raccordi siano lontani da $\tau(\sigma)$ in maniera uniforme, ossia

$$\mathrm{dist}(\mathrm{RACCORDI}, \tau(\sigma)) \geq d > 0 \quad \forall\, |\sigma| \leq M.$$

Applichiamo di nuovo Cauchy integrando sul cammino di figura. Dunque

$$h(R,\sigma R) \cong \frac{1}{2}\, e^{-R\phi(\tau(\sigma),\sigma)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{Ru^2} \frac{T(u,\sigma)}{\mathrm{sh}T(u,\sigma)} \frac{\partial T}{\partial u}(u,\sigma)du \tag{3.8}$$

Poniamo

$$q(u,\sigma) = \frac{T(u,\delta)}{\mathrm{sh}\ T(u,\sigma)} \frac{\partial T}{\partial u}\ (u,\sigma)$$

e scriviamo

$$(3.9) \qquad q(u,\sigma) = q(o,\sigma) + u\,\hat{q}\,(u,\sigma).$$

Da (3.8) e (3.9) si trae

$$h(R,\sigma R) \sim \frac{1}{2}\, e^{-R\phi(r(\sigma),\sigma)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ru^2} q(0,\sigma)du \right.$$

$$\left. + \frac{1}{R} \int_{-\varepsilon\sqrt{R}}^{\varepsilon\sqrt{R}} e^{-z^2}\, \hat{q}\left(\frac{z}{\sqrt{R}}, \sigma\right) dz \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{R}}\, q(0,\sigma)\, e^{-R\phi(\tau(\sigma),\sigma)} \left\{1 + 0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right\}.$$

Abbiamo utilizzato il fatto che $q(0,\sigma) = \dfrac{\tau(\sigma)}{sh\tau(\sigma)} \dfrac{\partial T}{\partial u}(0,\sigma)$ non ha zeri per $|\sigma| \leq M$.

Ora analizziamo $\partial h/\partial t$.

$$(3.11) \qquad \frac{\partial h}{\partial t}(R,t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (i\tau) \frac{\tau}{sh\tau} e^{[it\tau - R\frac{\tau}{\tau h\tau}]} d\tau$$

da cui come in precedenza

$$\frac{\partial f}{\partial t}(R,\sigma R) \sim \frac{1}{2} e^{-R\Phi(\tau(\sigma),\sigma)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-Ru^2} iT(u,\sigma)\, q(u,\sigma) d\sigma$$

(3.12)

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{R}}\, q(0,\sigma)\, e^{-R\Phi(\tau(\sigma),\sigma)} \{i\tau(\sigma) + 0\,(\frac{1}{\sqrt{R}})\}$$

Finalmente analizziamo $\partial h/\partial R$.

$$(3.13) \qquad \frac{\partial h}{\partial R}(R,t) = \frac{1}{2} \int e^{[it\tau - R\frac{\tau}{th\tau}]} (-\frac{\tau}{th\tau})(\frac{\tau}{sh\tau})\, d\tau$$

e quindi

$$(3.14) \qquad \frac{\partial h}{\partial R}(R,\sigma R) \sim \frac{1}{2} e^{-R\Phi(\tau(\sigma),\sigma)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-Ru^2} \left(\frac{-T(u,\sigma)}{\text{th } T(u,\sigma)}\right) q(u,\sigma)du$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{R}}\, q(o,\sigma)\, e^{-R\,\Phi(\tau(\sigma),\sigma)} \left\{-\frac{\tau(\sigma)}{\text{th}\tau(\sigma)} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right\}$$

Da (3.10), (3.12) e (3.14) e (3.4) la stima (1.2) si riduce a

$$\left[\left(\frac{\tau(\sigma)}{\text{th } \tau(\sigma)}\right)^2 - \tau(\sigma)^2 + 0\,\frac{1}{\sqrt{R}}\right]$$

$$\leq \theta\left[-\frac{1}{R} + \frac{\tau(\sigma)}{\text{th}\tau(\sigma)} - i\tau(\sigma)\sigma + 0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right]$$

e poichè $\tau(\sigma) = i\beta(\sigma)$ abbiamo

$$\left[\left(\frac{\beta(\sigma)}{\text{tg } \beta(\sigma)}^2 + \beta(\sigma)^2 + 0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right)\right]$$

$$\leq \theta\left[-\frac{1}{R} + \frac{\beta(\sigma)}{\text{tg } \beta(\sigma)} + \beta(\sigma)\,\sigma + 0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right]$$

Ricordiamo che $\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}(\tau(\sigma), \sigma) = 0$, ossia che

$$(3.17) \qquad \frac{1}{\operatorname{tg}\beta(\sigma)} - \beta(\sigma)\frac{1+\operatorname{tg}^2\beta(\sigma)}{\operatorname{tg}^2\beta(\sigma)} = 0$$

Da (3.16) e (3.17) segue infine

$$(3.18) \qquad (\theta-1)\beta(\sigma)^2\left[1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta(\sigma)}\right] \geq \frac{\theta}{R} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$$

Teniamo conto che $\inf\limits_{[-\pi,\pi]} x^2\left[1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right] > 0.$

Si trae che (3.18) sussiste per $R \to \infty$.

2^A TAPPA. Sia $|t|/R \to \infty$ e $|tR| \to \infty$. Notiamo che in questa situazione $|t| + R \sim |t|$.

Consideriamo per brevità il caso $t > 0$.

Poniamo

$$f(\tau) = e^{[it\tau - R\frac{\tau}{\operatorname{th}\tau}]}\frac{c}{\operatorname{Sh}\tau}$$

La funzione $\tau \to f(\tau)$ ha una singolarità essenziale in $\tau = i\pi$. Dal teorema dei residui segue

$$(3.19) \qquad h(R,t) = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{Im}\,\tau = \frac{3}{2}\pi} f(\tau)d\tau + 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f, i\pi)$$

$$(3.20) \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(R,t) = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{Im}\,\tau = \frac{3}{2}\pi} (i\tau)f(\tau)d\tau + 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(i\tau f, i\pi)$$

$$(3.21) \qquad \frac{\partial f}{\partial R}(R,t) = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{Im}\,\tau = \frac{3}{2}\pi} \left(-\frac{r}{\mathrm{th}\tau}\right)f(\tau)d\tau + 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{-\tau}{\mathrm{th}\tau} f, i\pi\right)$$

Tenuto conto che $\mathrm{sh}(\tau + \frac{3}{2}\pi i) = -i\ \mathrm{ch}\tau$, $\mathrm{ch}(\tau + \frac{3}{2}\pi i) = -i\ \mathrm{sh}\tau$, otteniamo

$$(3.22) \qquad \left| \int_{\mathrm{Im}\,\tau = \frac{3}{2}\pi} f(r)d\tau \right| \le e^{-3/2\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-R\tau \mathrm{th}\tau} \frac{|t| + \frac{3}{2}\pi}{\mathrm{ch}\tau}\, d\tau$$

$$\le C\, e^{-3/2\pi t} \left(\frac{1}{1+\sqrt{R}}\right),$$

$$(3.23) \qquad \left| \int_{\mathrm{Im}\tau=\frac{3}{2}\pi} i\tau\, f(r)d\tau \right| \le e^{-3/2\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-R\tau \mathrm{th}\tau} \frac{(|\tau|+\frac{3}{2\pi})^2}{\mathrm{ch}\tau}\, d\tau$$

$$\le C\, e^{-3/2\pi t} \left(\frac{1}{1+\sqrt{R}}\right)$$

$$(3.24) \qquad \left| \int_{\mathrm{Im}\tau=\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{-\tau}{\mathrm{th}\tau}\right) f(\tau)d\tau \right| \le e^{-3/2\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-R\tau \mathrm{th}\tau} \frac{(|\tau|+\frac{3}{2}\pi)^2}{\mathrm{ch}\tau}$$

$$\le C\, e^{-3/2\pi t} \left(\frac{1}{1+\sqrt{R}}\right)$$

Ora notiamo che

$$\mathrm{Res}\,(f,i\pi) = i\pi \mathrm{Res}\ \ (f(i\pi(\cdot+1),0) =$$

$$= \frac{1}{2}\, e^{-\pi t} \int_{C_r} e\,[-\pi t\tau - \pi R \frac{\tau+1}{\mathrm{tg}\pi T}]\ \frac{\pi(\tau+1)}{\mathrm{Sin}\pi\tau} d\tau$$

dove $C_r = \{-r\, e^{i\phi} | -\pi \le \varphi \le \pi\}$ ed r sarà scelto in maniera opportuna. Analizziamo la fase nell'integrale (3.25). Uno sviluppo di Laurent vicino al

polo $\tau=0$ ci permette di scrivere

$$(3.26) \qquad -\pi t\tau - \pi R \frac{\tau+1}{tg\pi r} = -\pi t\tau - R - \frac{R}{\tau} + \pi R\tau\, p(\pi\tau)$$

con p olomorfa vicino a 0. A questo punto, scegliamo $r = \sqrt{\frac{R}{\pi t}}$ e poniamo $\lambda = \sqrt{\pi R t}$.

Dalla (3.26) si trae che per $\tau \in C_r$, abbiamo

$$(3.27) \qquad -\pi t\tau - \pi R \frac{\tau+1}{tg\pi\tau} = -R + \lambda(2\cos\varphi - r\, q(\pi r e^{i\varphi}))$$

con q olomorfa vicino a 0.

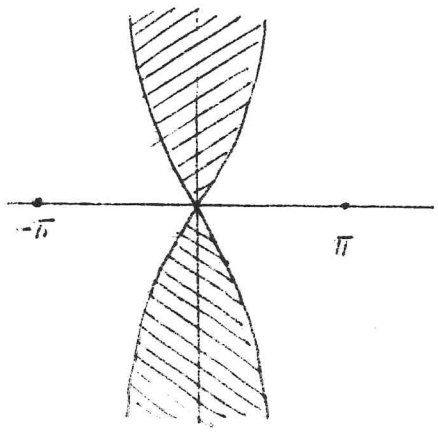
Da (3.25) e (3.27) si ottiene

$$(3.28) \qquad Res(f,0\pi) = -\frac{i}{2}\, e^{-\pi-R} \int_{-\pi}^{\pi} e^{[\lambda 2\cos\varphi - rq(\pi\rho e^{i\varphi})]} \frac{\pi(1-re^{-i\varphi})}{\sin(\pi r e^{i\varphi})}\, re^{i\varphi} d\varphi$$

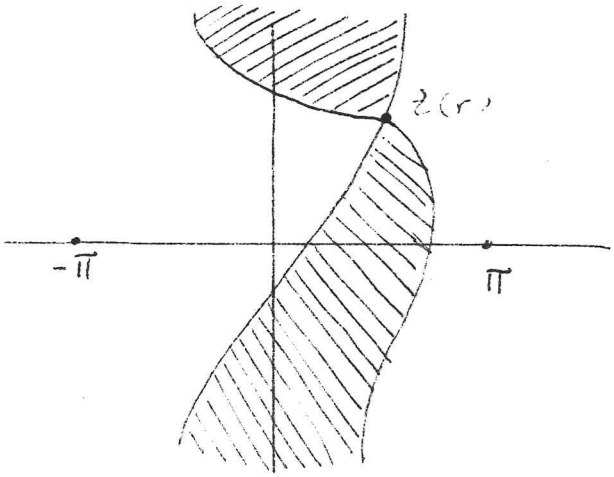
Poniamo quindi

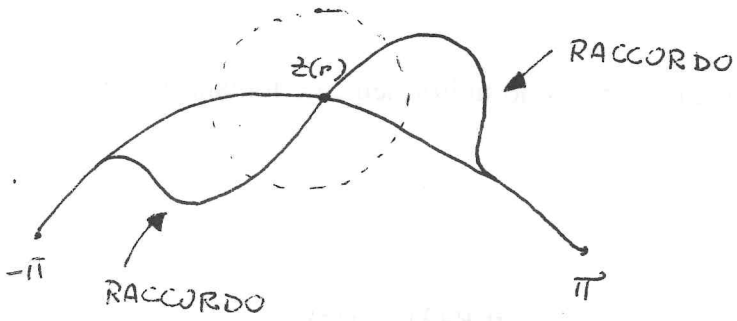
(3.29) $\varphi(z,r) = 2\cos z - rq\,(re^{iz})$.

Abbiamo $\psi(z,o) = 2\cos z$. La funzione $z \to \cos z$ ha un punto critico semplice in $z=0$. La regione $\mathrm{Re}\,\psi(z,o) \leq 2$ è disegnata in figura



Per r sufficientemente piccolo, $z \to \psi(z,r)$ ha un punto critico $z(r)$, $\psi(z,r) = \psi(z(r),r) + (z-z(r))^2\,E(z,r)$. La regione $\mathrm{Re}\,\psi(z,r) \leq \mathrm{Re}\,\psi(z(r),r)$ è disegnata in figura





Esiste ancora un cammino contenuto nella regione suddetta. Ora esiste un altro cammino $u \to z(u,r)$ tale che

$$(3.30) \qquad \begin{cases} z(0,r)=z(r) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(0,0)=1 \\ (z(u,r)-z(r))^2 E(z(u,r),r)= -u^2 \end{cases}$$

per r ed |u| sufficientemente piccoli.

Il Teorema di Cauchy consente di calcolare l'integrale in (3.28) lungo il cammino di figura

Naturalmente i raccordi sono uniformemente lontani da z(r). Dalla (3.28) segue

$$\mathrm{Res}(f,i\pi) = -\frac{i}{2} e^{-\pi t - R + \lambda\psi(z(r),r)}$$

(3.31)

$$\left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda u^2} \frac{(1-r\, e^{iz(r,u)})}{\sin(\pi r e^{iz(r,u)})} r e^{iz(r,u)} \frac{\partial z}{\partial u}(r,u)\, du + 0(\lambda^{-\infty}) \right\}$$

Ora abbiamo

(3.32) $$\frac{\pi(1-w)}{\sin \pi w} = 1 + wK(w)$$

ed allora (3.29) diventa

$$\mathrm{Res}\,(f,i\pi) = -\frac{i}{2}\, e^{-\pi t - R + \lambda\psi(z(r),r)}\,.$$

$$\cdot \left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda u^2} (1 + r e^{iz(r,u)} R(r e^{iz(r,u)})) \frac{\partial z}{\partial u}(r,) + 0(\lambda^{-\infty}) \right\}$$

A questo punto, ricordiamo le (3.30).

$$\mathrm{Res}(f,i\pi) = -\frac{i}{2}\, e^{-\pi t - R + \lambda\psi(z(r),r)} \,.$$

$$\cdot \left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda u^2}\, du + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda u^2}\, [rf(u,r) + u\, g(u,r)]\, du + 0(\lambda^{-\infty}) \right\}$$

$$(3.34) \qquad = -\frac{i}{2}\, e^{-\pi t - R + \lambda\psi(z(r),r)} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

$$\cdot \left\{ 1 + 0(r) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) + 0(\lambda^{-\infty}) \right\}$$

In conclusione abbiamo provato che

$$(3.35) \qquad h(R,t) \cong \pi \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, e^{-\pi t - R + \lambda\psi(z(r),r)}$$

per $R + t \to \infty$, $\lambda \to \infty$, $r \to 0$.

Studiamo lo sviluppo asintotico di $\frac{\partial h}{\partial t}$.

Ciò equivale a studiare Res $(i\tau f(r), i\pi)$.

Procedendo come nello studio di $\mathrm{Res}(f,i\pi)$, otteniamo un integrale di

Fourier con la stessa fase, mentre la nuova ampiezza è data dalla precedente moltiplicata per

$$-\pi(\tau+1)\,\frac{\pi(\tau+1)}{\sin(\pi\tau)}$$

Dunque

$$\text{(3.36)} \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(R,t) \cong -\pi^2 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, e^{-\pi t - R + \lambda\psi(z(r),r)}\,.$$

Studiamo lo sviluppo asintotico di $\frac{\partial h}{\partial R}$. Otteniamo un integrale di Fourier con la fase dell'integrale relativo ad h, mentre l'ampiezza è data da

$$\text{(3.37)} \qquad \frac{-i\pi(\tau+1)}{\mathrm{th}[i\pi(2+1)]}\,\frac{\pi(r+1)}{\sin\pi\tau} = -\frac{1}{\tau}\,(1+\tau\,A(r))\,\frac{\pi(2+1)}{\sin(\pi\tau)}$$

con $A(\tau)$ olomorfa per $|\tau|$ piccolo. Dalla (3.37) segue

$$\text{(3.38)} \qquad \frac{\partial h}{\partial R}(R,t) \cong \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, e^{-\pi t - R + \lambda\psi(z(r),r)}$$

Mettendo insieme (3.35), (3.37) e (3.38) otteniamo

$$(3.39)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(R,t) \cong -h(R,t) \\ \dfrac{\partial h}{\partial R}(R,t) \cong \dfrac{1}{r} h(R,t) \end{cases}$$

con $R + |t| \to \infty$, $\dfrac{|t|}{R} \to \infty$, $|tR| \to \infty$.

La stima (1.2) in base a (3.39) si riduce a

$$(3.40)\qquad (1 + \frac{\pi R}{|t|}) \leq \theta\,(1 - \sqrt{\frac{R}{\pi|t|}} + \frac{2}{\pi|t|}).$$

Con le nostre ipotesi su R e z, la (3.40) sussiste.

3ª TAPPA. Sia $|z|/R \to \infty$ e $|tR|$ limitato. Poichè $tR \leq M$, $Rr \leq \dfrac{M}{t} r \leq$ costante $\cdot$ r quando $t \to \infty$.

Ne segue che

$$(3.41)\qquad e^{-\pi R r e^{i\varphi}(\pi r e^{i\varphi})} = 1 + r\,C(r,R,\varphi)$$

con $|C\,(r,R,\varphi| \leq$ costante.

Da (3.41) si trae

$$(3.42)\qquad h(R,t) = \pi e^{-\pi t - R} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\lambda\cos\varphi}\,(1 + rD(r,R,\varphi)d\varphi$$

$$+ e^{-3/2\pi t}\, 0(\frac{1}{1+\sqrt{R}})$$

con D limitata. Perciò

$$h(R,t) \sim \pi e^{-\pi t-R} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\lambda\cos\varphi} = 2\pi^2 e^{-\pi t} e^{-\pi t-R} I_0(2\lambda) \tag{3.43}$$

dove I_0 è la funzione di Bessel del primo tipo e ordine 0.

Con la stessa tecnica si prova che

$$\frac{\partial h}{\partial t}(R,t) \cong -\pi h(R,t) \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial h}{\partial R}(R,t) \cong \frac{1}{2\pi r} \lambda E(\lambda) h(R,t) \tag{3.45}$$

dove $$E(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\lambda\cos\varphi} \cos\varphi \, d\varphi$$

Da (3.44) e (3.45) si deduce che la stima (1.2) si riduce a

$$\frac{R}{r^2}\left[\left(\frac{\lambda E(\lambda)}{2\pi}\right)^2 + 0(1)\right] \leq \theta \, \pi t \, (1+0(1)). \tag{3.46}$$

Poichè $\frac{R}{r^2} = \pi t$ e $0 \leq \lambda E(\lambda) \leq 2\pi$, la (3.46) è di nuovo vera e ciò conclude la prova della stima (1.2). Un calcolo più dettagliato è contenuto in [GS2].

BIBLIOGRAFIA

[A] K. AMANO, *Maximum principles for degenerate elliptic-parabolic operators*, Indiana U. Math. K. 28 (1979), 545-557).

[B] H. BAUER, *Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie*, Lecture Notes in Math., vol. 22, Springer Verlag, 1966.

[Bo] J.M. BONY, *Principe du maximum, unicité du problème de Cauchy et inégalité de Harnack pour les opérateurs elliptiques dégénerés*, Ann. Inst. Fourier, 19 (1968), 277-304.

[Br] M. BRELOT, *On topologies and boundaries in potential theory*, Lecture Notes in Math., vol. 194, Springer Verlag, 1971.

[C] J. CYGAN, *Wiener's test for Brownian motion on the Heisenberg group*, Coll. Math. 39 (1978), 367-373.

[D] J. DIEUDONNE, *Calcul infinitésimal*, Paris, Hermann (1968).

[EK] E.G. EFFROS and J.L. KAZDAN, *On the Dirichlet problem for heat equation*, Indiana U. Math. J., 20 (1971), 683-693.

[EG] L.C. EVANS and R.F. GARIEPY, *Wiener's criterion for the heat equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. 78 (19827, 293-314.

[FG] E.B. FABES and N. GAROFALO, *Mean value properties of solutions to parabolic equations with variable coefficients*, J. Math. Anal. Appl. 121 (1987), 305-316.

[FGL] E.B. FABES, N. GAROFALO and E. LANCONELLI, *Wiener's criterion for divergence form parabolic operators with C^1-Dini continuous coefficients*. Duke Math. J. 59 (1989), 191-232.

[F] G.B. FOLLAND, *A fundamental solution for a subelliptic operator*, Bull. Amer. Math. oc. 79(2) (1973), 373-376.

[FS] G.B. FOLLAND and E.M. STEIN, *Estimates for the $\bar{\partial}_b$-comples and analysis on the Heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math. 27

(1974), 429-522.

[GL1] N. GAROFALO and E. LANCONELLI, *Wiener's criterion for parabolic equations with variable coefficients and its consequences,* Trans. Amer. Math. Soc. 308 (1988), 811-836.

[GL2] N. GAROFALO and E. LANCONELLI, *Asymptotic behavior of fundamental solutions and potential theory of parabolic operators with variable coefficients,* Math. Ann. 283 (1989), 211-239.

[GS1] N. GAROFALO and F. SEGALA, *New results on the Pompeiu problem,* Trans. Amer. Math. oc., to appear.

[GS2] N. GAROFALO and F. SEGALA, *Estimates of the fundamental solution and Wiener's criterion for the heat equation on the Heisenberg group.* Preprint.

[G] B. GAVEAU, *Principle de moindre action, propagation de la chaleur et éstimées sous élliptiques sur certain groupes nilpotents,* Acta Math. 139 (1977), 95-153.

[H] L. HÖRMANDER, *Hypoelliptic second order differential equations,* Acta Math. 119 (1967), 147-171.

[HM] H. HUEBER and D. MÜLLER, *Asymptotics for some Green kernels on the Heisenberg group and the Martin boundary,* Math. Ann. 283 (1989), 97-119.

[JS] D.S. JERISON and A. SANCHEZ-CALLE, *Estimates for the heat kernel for a sum of squares of vector fields,* Indiana U. Math. J. 35 (1986), 835-854.

[KS] S. KUSUOKA and D.W. STROOCK, *Applications of Malliavin calculus.* III, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo ect. IA Maath. 34 (1987), 391-442.

[L] E. LANCONELLI, *Sul problema di Dirichlet per l'equazione del calore,* Ann. Mat. Pura Appl. 97 (1973), 83-114.

[Le] N.N. LEBEDEV, *Special functions and their applications,* Dover (1972), New York.

[NSW] A. NAGEL, E.M. STEIN and S. WAINGER, *Balls and metrics*

defined by vector fields. I. Acta Math., 155 (1985).

[NS1] P. NEGRINI and V. SCORNAZZANI, *Superharmonic functions and regularity of boundary points for a class of elliptic-parabolic partial differential operators*, Boll. UMI, Analis Funz. Appl. 3 (1984), 85-107.

[NS2] P. NEGRINI and V. SCORNAZZANI, *Wiener criterion for a class of degenerate elliptic operators*, J. Diff. Equations 66 (1987), 151-164.

[S] A. SANCHEZ-CALLE, *Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields*, Invent. Math. 78 (1984), 143-160.